0.1 Half twist Smash Product

Definition 0.1.1

U, U' を univerce とする。このとき $\overline{U}$ を U の finite dimensional subspace を object とした discrete catgeory とする。$(\mathscr{S}U')^{\overline{U}}$ の full subcategory の

$$\mathscr{S}(U';U) = \{\, E \in (\mathscr{S}U')^{\overline{U}} \text{ with } \rho_{V,W} : \Sigma^{W-V}E_W \xrightarrow{\cong} E_V \in \mathrm{Mor}(\mathscr{S}U')\ ,\ V \subset W \,\}$$

を定義する。ρ は structure map と呼ばれる。

Example 0.1.2

$U = U'$ で、X を based space とするとき、$E(X) \in \mathscr{S}(U;U)$ を $E(X)_V = \Sigma_V^\infty X$ により定義する。このとき、$V \subset W$ に対し、

$$\rho_{V,W} : \Sigma^{W-V}E(X)_W = \Sigma^{W-V}\Sigma_W^\infty X \xrightarrow{\cong} \Sigma_V^\infty X = E(X)_V$$

により定義する。

Example 0.1.3

$f : U \longrightarrow U'$ を linear isometries とし、X を based space とする。このとき、$E_f \in \mathscr{S}(U;U')$ を、$E_f(X)_V = \Sigma_{f(V)}^\infty X$ により定義する。このとき、

$$\rho_{V,W} : \Sigma^{W-V}E^f(X)_W = \Sigma^{W-V}\Sigma_{f(W)}^\infty X \xrightarrow{\cong} \Sigma^{f(W)-f(V)}\Sigma_{f(W)}^\infty X \cong \Sigma_{f(V)}^\infty = E_f(X)_V$$

Definition 0.1.4

U, U' を univerce とし、$\mathscr{I}(U,U')$ を liner isometries の集合とし、$\mathrm{Map}(U,U')$ の部分空間と見なす。A を (unbased)space、$\alpha : A \longrightarrow \mathscr{I}(U,U')$ を連続写像とする。さらに、U, U' の finite dimensional subspace として、$V \subset U$, $V' \subset U'$ をとったとき、$A_{V,V'}$ を

$$\begin{tikzcd} A_{V,V'} \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathscr{I}(V,V') \arrow[d, "\mathrm{inclusion}_*"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & \mathscr{I}(U,U') \arrow[r, "\mathrm{inclusion}^*"'] & \mathscr{I}(V,U') \end{tikzcd}$$

の pull back として定義する。このとき、

$$A_{V,V'} = \{a \in A \mid \alpha(a)(V) \subset V'\}$$

である。さらにこのとき、$A_{V,V'}$ 上の（実）vector bundle を、

$$\eta(\alpha)_{V,V'} : E(\eta) = \{(a,v') \in A_{V,V'} \times V' \mid v' \perp \alpha(a)(V)\} \longrightarrow A_{V,V'}$$

と projection で定義する。これは V' の内積を用いて Riemann 計量を定めることができ、$T(\alpha)_{V,V'}$ を $\eta(\alpha)_{V,V'}$ の Thom 空間とする。V を固定したとき、

$$T(\alpha)_V = \{T(\alpha)_{V,V'} \mid V' \subset U' \text{ finite dimension }\}$$

とすると、$V' \subset W'$ に対し、$W'-V' : W'-V' \longrightarrow *$ を trivial bundle として、

$$\eta(\alpha)_{V,V'} \oplus (W'-V') \xrightarrow{\cong} \eta(\alpha)_{V,W'}|_{A_{V,V'}} \hookrightarrow \eta(\alpha)_{V,W'}$$

という bundle map が定義でき、ここから

$$\Sigma^{W'-V'} T(\alpha)_{V,V'} \longrightarrow T(\alpha)_{V,W'}$$

が定義され pre-spectrum となり、$T(\alpha)_V \in \mathscr{P}U'$ である。これをに spectrification を施したものを $\mathscr{M}(\alpha)_V \in \mathscr{S}U'$ とおくと、$\mathscr{M}(\alpha) \in \mathscr{S}(U';U)$ となる。ただし、structure map

$$\Sigma^{W-V} \mathscr{M}(\alpha)_{W,V'} \longrightarrow \mathscr{M}(\alpha)_{V,V'}$$

は、

$$\eta(\alpha)_{W,V'} \oplus (W-V) \xrightarrow{\cong} (\eta(\alpha)_{V,V'})|_{A_{W,V'}} \longrightarrow \eta(\alpha)_{V,V'}$$

このとき、

$$\mathscr{M} : \mathbf{TOP} \downarrow \mathscr{I}(U,U') \longrightarrow \mathscr{S}(U',U)$$

は functor となる。

Proposition 0.1.5

There is an isomorphism $\mathscr{M}(\alpha)_0 \cong \Sigma^\infty A_+$ that is natural in α.

proof)　　$\alpha : A \longrightarrow \mathscr{I}(U,U')$ に対し、$V=0$ のとき、

$$A_{0,V'} = \{a \in A \mid \alpha(a)(0) \subset V' \} = A$$

であり、

$$\eta(\alpha)_{0,V'} : A \times V' \longrightarrow A$$

は trivial bundle であるので、この Thom 空間は、$T(\alpha)_{0,V'} \cong S^{V'} \wedge A_+$ であるため、$\mathscr{M}(\alpha)_0 \cong \Sigma^\infty A_+$

$\square$

Proposition 0.1.6

$\alpha : A \longrightarrow \mathscr{I}(U,U')$, $V \subset U$, $V' \subset U'$: finite dimension に対し、$V \overset{\alpha}{\cong} V'$ であるならば、There is an isomorphism $\mathscr{M}(\alpha)_V \cong \Sigma^{\infty}_{V'} A_+$ that is natural in α.

proof)

Definition 0.1.7 *half twist smash product*

$\mathscr{E} \in \mathscr{S}(U';U)$ と $E \in \mathscr{S}U$ に対し、$V \subset W \subset U$: finite dimensional subspaces に対し、

$$\mathscr{E}_V \wedge EV \longrightarrow \mathscr{E}_W \wedge EW$$

を、

$$\mathscr{E}_V \wedge EV \cong \Sigma^{W-V} \mathscr{E}_W \wedge EV \cong \mathscr{E}_W \wedge \Sigma^{W-V} EV \longrightarrow \mathscr{E} \wedge EW$$

これより U' 上の supectrum

$$\mathscr{E} \wedge E = \mathrm{colim}_{V \subset U} \mathscr{E}_V \wedge EV$$

が得られる。このとき、

$$- \wedge - : \mathscr{S}(U';U) \times \mathscr{S}U \longrightarrow \mathscr{S}U'$$

は bifunctor である。

Proposition 0.1.8

$$\wedge : \mathscr{S}(U';U) \times \mathscr{S}U \longrightarrow \mathscr{S}U'$$

と

$$\wedge : \mathscr{S}U \times \mathbf{TOP}_* \longrightarrow \mathscr{S}U$$

に対して、$\mathscr{E} \in \mathscr{S}(U;U)$, $E \in \mathscr{S}U$, $X \in \mathbf{TOP}_*$ を取ると、There is a natural isomorphism

$$(\mathscr{E} \wedge E) \wedge X \cong \mathscr{E} \wedge (E \wedge X)$$

proof) $V' \subset U'$ に対し、

$$\begin{aligned}(\mathscr{E} \wedge E) \wedge X(V') &= (\mathscr{E} \wedge E)(V') \wedge X \\ &= (\mathrm{colim}_{V \subset U} \mathscr{E}_V \wedge EV)(V') \wedge X \\ &\cong \mathrm{colim}_{V \subset U} (\mathscr{E}_V(V') \wedge EV \wedge X) \\ &= \mathrm{colim}_{V \subset U} (\mathscr{E}_V(V') \wedge (E \wedge X)(V)) \\ &\cong \mathrm{colim}_{V \subset U} (\mathscr{E}_V \wedge (E \wedge X)(V))(V') \\ &= (\mathscr{E} \wedge (E \wedge X))(V')\end{aligned}$$

である。

$\square$

Definition 0.1.9

$\alpha : A \longrightarrow \mathscr{I}(U,U')$ と、$E \in \mathscr{S}U$ に対し、

$$\alpha \ltimes E = M_\alpha \wedge E$$

と定義する。あるいはその定義域を用いて $A \ltimes E$ と書く。

$$- \ltimes - : \mathbf{TOP} \downarrow \mathscr{I}(U,U') \times \mathscr{S}U \longrightarrow \mathscr{S}U'$$

は bifuctor となる。

Proposition 0.1.10

$\alpha : A \longrightarrow \mathscr{I}(U,U')$ と X : based space に対し、
There is an isomorphism of spectra $A \ltimes \Sigma^\infty X \cong \Sigma^\infty(A_+ \wedge X)$ that is natural in α and X.

proof) $\alpha : A \longrightarrow I(U,U')$ と $V' \subset U'$ に対し、

$$\begin{aligned}A \ltimes \Sigma^\infty X(V') &= (\mathscr{M}(\alpha) \wedge \Sigma^\infty X)(V') \\ &= (\mathrm{colim}_{V \subset U} \mathscr{M}(\alpha)_V \wedge \Sigma^\infty X(V))(V') \\ &\cong \mathrm{colim}_{V \subset U} \mathscr{M}(\alpha)_{V,V'} \wedge (S^V \wedge X) \\ &= \mathrm{colim}_{V \subset U} (\mathscr{M}(\alpha)_{V,V'} \wedge S^V) \wedge X \\ &\cong \mathrm{colim}_{V \subset U} \mathscr{M}(\alpha)_{0,V'} \wedge X \\ &= \Sigma^\infty A_+(V') \wedge X = \Sigma^\infty(A_+ \wedge X)(V')\end{aligned}$$

である。

□

Definition 0.1.11 *External Product*

$$\wedge : \mathscr{S}U \times \mathscr{S}U' \longrightarrow \mathscr{S}(U \oplus U')$$

を次のように定義する。$E \in \mathscr{S}U$, $E' \in \mathscr{S}U'$ に対し、

$$(E \wedge E')(V \oplus V') = EV \wedge EV'$$

structure map は

$$\begin{aligned}\Sigma^{(W\oplus W')-(V\oplus V')}(E \wedge E')(V \oplus V') &= S^{(W-V)\oplus(W'-V')} \wedge EV \wedge E'V' \\ &\longrightarrow (S^{W-V} \wedge S^{W'-V'}) \wedge EV \wedge E'V' \\ &\cong (S^{W-V} \wedge EV) \wedge (S^{W'-V'} \wedge E'V') \\ &\longrightarrow EW \wedge E'W' = (E \wedge E')(W \oplus W')\end{aligned}$$

で定義し、homeo の条件が消えてしまうので spectrification を施す。これを E と E' の External product と呼ぶ。

Proposition 0.1.12

1. $f \in \mathscr{I}(U,U')$ に対し、$f : * \longrightarrow \mathscr{I}(U,U')$ は、$f(*) = f$ とする。このとき、There is a natural isomorphism $f \ltimes E \cong f_* E$

   ただし、$f_*(E) \in \mathscr{S}(U')$ は $f_*E(V') = E(f^{-1}(V'))$ である。特に、$U = U'$ で $f = 1$ のとき、$1 \ltimes E \cong E$

2. $\alpha : A \longrightarrow \mathscr{I}(U,U')$, $\beta : B \longrightarrow \mathscr{I}(U',U'')$ に対し、

   $$\beta \times_c \alpha : B \times A \longrightarrow \mathscr{I}(U',U'') \times \mathscr{I}(U,U') \xrightarrow{\circ} \mathscr{I}(U,U'')$$

   を考えたとき、there is a natural isomorphism

   $$(B \times_c A) \ltimes E \cong B \ltimes (A \ltimes E)$$

3. $\alpha : A \longrightarrow \mathscr{I}(U_1,U_1')$, $\beta : B \longrightarrow \mathscr{I}(U_2,U_2')$ に対し、

   $$\alpha \times_\oplus \beta : A \times B \longrightarrow \mathscr{I}(U_1,U_1') \times \mathscr{I}(U_2,U_2') \xrightarrow{\oplus} \mathscr{I}(U_1 \oplus U_2, U_1 \oplus U_2)$$

   を考えたとき、there is a natural isomorphism

   $$(A \times_\oplus B) \ltimes (E_1 \wedge E_2) \cong (A \ltimes E_1) \wedge (B \ltimes E_2)$$

4. $A \longrightarrow \mathscr{I}(U,U')$, $E \in \mathscr{S}U$, $X \in TOP_*$ に対し、there is a natural isomorphism

$$A \ltimes (E \wedge X) \cong (A \ltimes E) \wedge X$$

proof) (1) を示す。Prop 0.1.6 により、

$$\mathscr{M}(f)_V \cong \Sigma^\infty_{f(V)} *_+ = \Sigma^\infty_{fV} S^0$$

である。

$$\begin{aligned}
f \ltimes E(V') &= \mathscr{M}(f) \wedge E(V') \\
&= (\mathrm{colim}_{V \subset U} \mathscr{M}(f)_V \wedge EV)(V') \\
&\cong \mathrm{colim}_{V \subset U} (\Sigma^\infty_{f(V)} S^0 \wedge EV)(V') \\
&\cong \mathrm{colim}_{V \subset U} \Sigma^\infty_{f(V)} S^0(V') \wedge EV \\
&= \mathrm{colim}_{V \subset U} S^{V' - f(V)} \wedge EV \\
&\cong \mathrm{colim}_{V \subset U} S^{f^{-1}(V') - V} \wedge EV \\
&\cong \mathrm{colim}_{V \subset U} E(f^{-1}(V')) = E(f^{-1}(V)) = f_*(E)(V')
\end{aligned}$$

続いて (2) であるが、$\mathscr{D} \in \mathscr{S}(U'',U')$, $\mathscr{E} \in \mathscr{S}(U',U)$ に対し、$\mathscr{D} \wedge_c \mathscr{E} \in \mathscr{S}(U'',U)$ を、$(\mathscr{D} \wedge_c \mathscr{E})_V = \mathscr{D} \wedge \mathscr{E}_V$ によって定義すれば、$E \in \mathscr{S}(U)$ に対し、

$$(\mathscr{D} \wedge_c \mathscr{E}) \wedge E \cong \mathscr{D} \wedge (\mathscr{E} \wedge E)$$

となる。このとき、$\mathscr{M}(\beta \times_c \alpha) \cong \mathscr{M}(\beta) \wedge_c \mathscr{M}(\alpha)$ が成り立つのだが、これは面倒なので省略。すると、

$$\begin{aligned}
(B \times_c A) \ltimes E &= \mathscr{M}(\beta \times_c \alpha) \wedge E \\
&= (\mathscr{M}(\beta) \wedge_c \mathscr{M}(\alpha)) \wedge E \\
&\cong \mathscr{M}(\beta) \wedge (\mathscr{M}(\alpha) \wedge E) = B \ltimes (A \ltimes E)
\end{aligned}$$

(3) も同様で、$\mathscr{D} \in \mathscr{S}(U_1',U_1)$, $\mathscr{E} \in \mathscr{S}(U_2',U_2)$ に対し、$\mathscr{D} \wedge_\oplus \mathscr{E} \in \mathscr{S}(U_1' \oplus U_2', U_1 \oplus U_2)$ を、

$$\mathscr{D} \wedge_\oplus \mathscr{E}(V_1 \oplus V_2) = \mathscr{D}_{V_1} \oplus \mathscr{D}_{V_2}$$

で定義すると、

$$(\mathscr{D} \wedge_\oplus \mathscr{E})(E_1 \wedge E_2) = (\mathscr{D} \wedge E_1) \wedge (\mathscr{E} \wedge E_2)$$

であり、

$$\mathscr{M}(\alpha \times_{\oplus} \beta) \cong \mathscr{M}(\alpha) \wedge_{\oplus} \mathscr{M}(\beta)$$

が成り立つので、上と同様である。

(4) は Prop 0.1.8 により、

$$A \ltimes (E \wedge X) = \mathscr{M}(\alpha) \wedge (E \wedge X) \cong (\mathscr{M}(\alpha) \wedge E) \wedge X = (A \ltimes E) \wedge X$$

$\square$